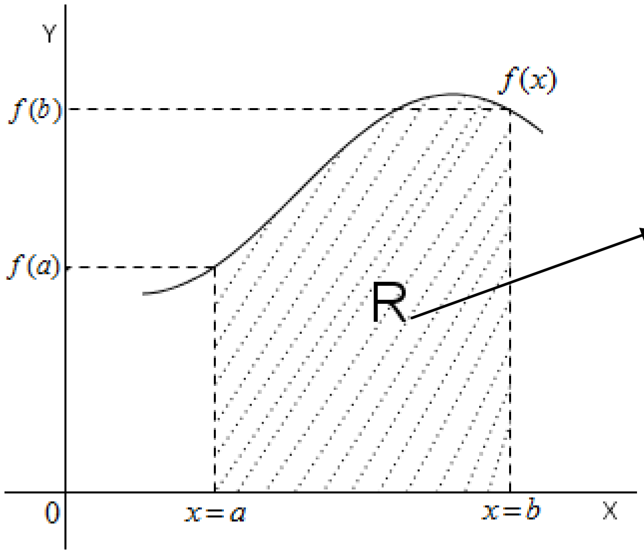
LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

Área definida bajo una curva

Multitud de problemas que se plantean en la vida real se resuelven calculando el área bajo la curva de una función.
Ejemplos: (Espacio, Velocidad, Trabajo, Volumen, Caudal….).

Se trata de encontrar el área limitada por una curva de ecuación y = f (x) continua y positiva, el eje de abscisas y dos ordenadas x=a, y x=b.



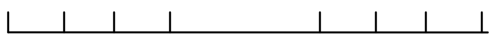
Trapecio mixtilíneo = figura determinada por la curva y = f (x), el eje OX y las rectas x=a y x=b.

¿Cómo proceder para obtener el área del recinto R?

- ***Partición de un intervalo:***
  Una partición P, de un intervalo [a, b], es una colección finita de puntos del intervalo $[a, b]$

$\boldsymbol{P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}}$ donde $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b}$

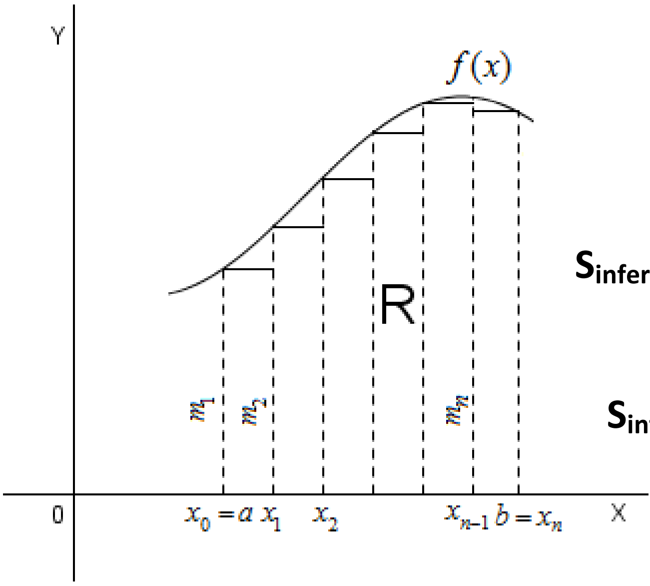
Una partición de **n+1 puntos** divide un intervalo en **n subintervalos**.



$\boldsymbol{a = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \qquad\qquad x_{n-1} \quad x_n = b}$

El área de este trapecio curvilíneo se puede aproximar por sumas inferior y superior de áreas de rectángulos que tienen la misma base y cuyas alturas son respectivamente el valor máximo y mínimo de la función en ese intervalo.

— *Aproximación por defecto del área (sumas inferiores)*

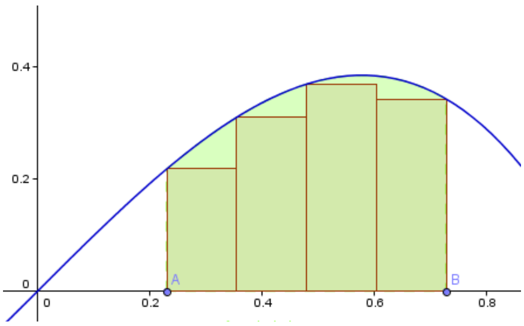


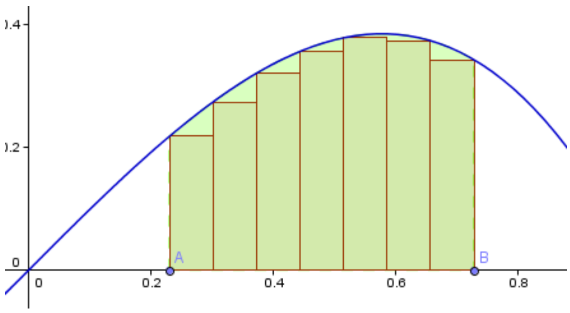
Suma inferior aproximada asociada a la partición P

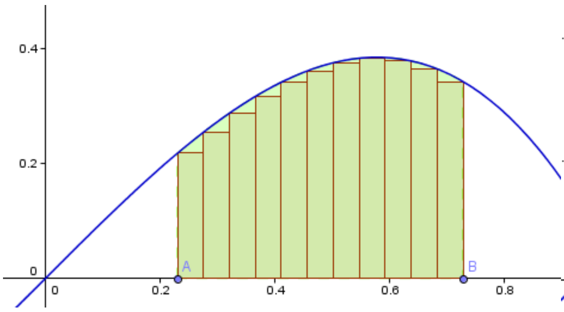
$$S_{inferior} = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots\cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$$

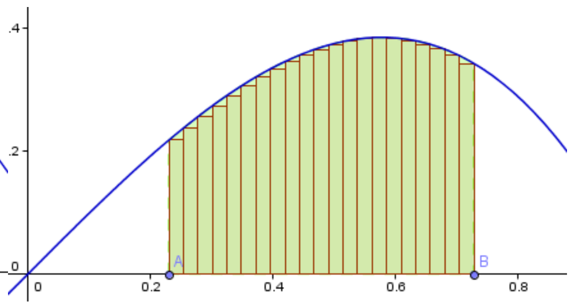
$$S_{inferior} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i \Rightarrow$$

Los valores de estas sumas van <u>creciendo</u> según aumenta el número de puntos de la partición del intervalo [a, b]



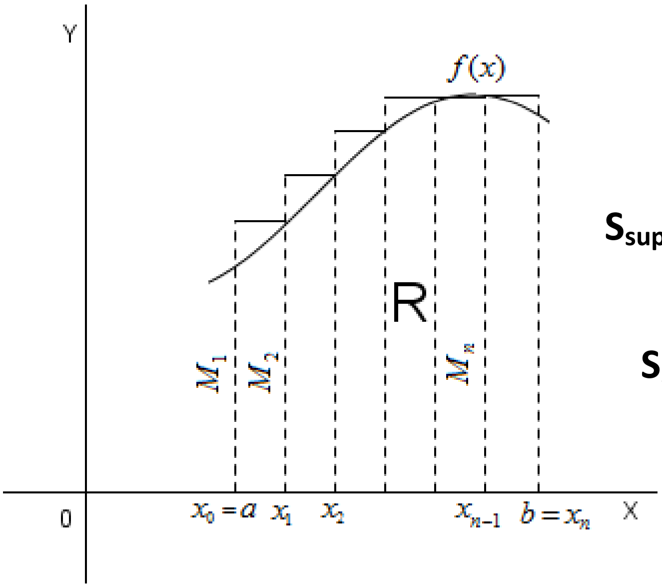






Al aumentar el número de elementos de la partición del intervalo [a, b], el valor del área obtenida se acerca cada vez más al <u>área exacta</u> del recinto R. Cada valor así obtenido es una aproximación del área del recinto R.

— *Aproximación por exceso del área (sumas superiores)*

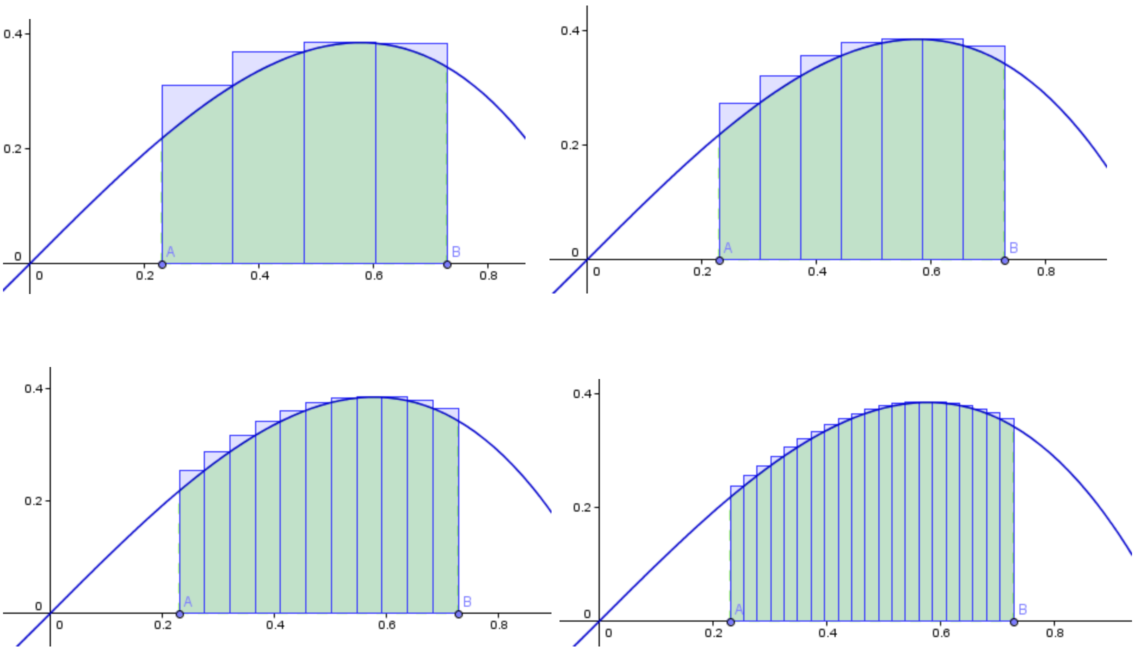


Suma superior aproximada asociada a la partición P

$$S_{superior} = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots\cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$S_{superior} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i \Rightarrow$$

Los valores de estas sumas van <u>decreciendo</u> según aumenta el número de puntos de la partición del intervalo [a, b]



Al aumentar el número de elementos de la partición del intervalo [a, b], el valor del área obtenida se acerca cada vez más al <u>área exacta</u> del recinto R. Cada valor así obtenido es una aproximación del área del recinto R.

Se tiene que: $S_{inferiores} \leq$ **Área del recinto R** $\leq S_{superiores}$

Si el número n de elementos de la partición del intervalo [a, b] aumenta $n \to \infty$, el máximo y el mínimo en cada uno de los intervalos se aproximan con lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{inferiores} = \lim_{n\to\infty} S_{superiores}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Este límite común recibe el nombre de Integral Definida de la función f(x) en el intervalo [a, b] y se designa por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (\Delta x)$$

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad f(c_i) \quad es\ un\ valor\ intermedio\ de\ la\ función$$

Nota: **el símbolo** $\int$ **recuerda el de una S (de suma) pero un tanto estilizada.**

Los límites a y b se llaman límites inferior y superior de integración, respectivamente y f(x) es el integrando.

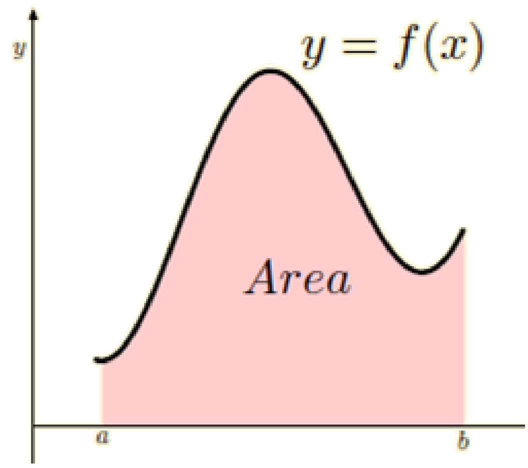
Al aumentar el nº de elementos de la partición

Sumas de las áreas de los rectángulos

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Definimos Integral Definida de $f(x)$ entre a y b, al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre los puntos a y b y el eje OX. Dicho área lo representaremos con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



— ***Propiedades***

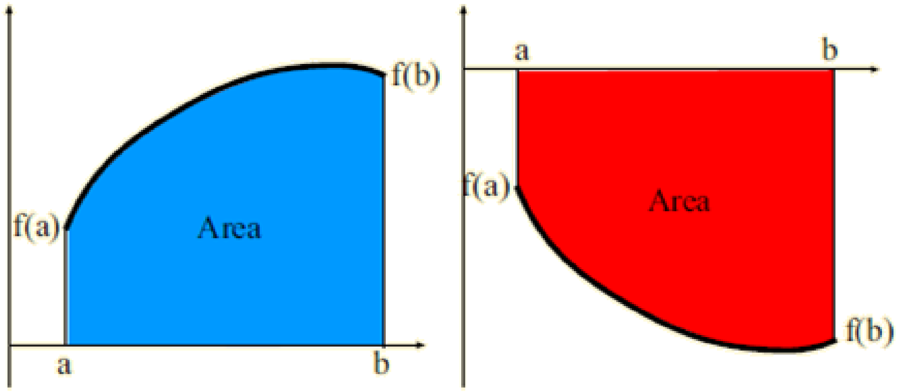
Para determinar el área bajo f distinguimos el signo de $f(x)$

- Si $f(x) > 0 \quad x \in [a, b]$, entonces la integral definida es positiva

$$\text{Area del recinto } = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $f(x) < 0 \quad x \in [a, b]$, entonces la integral definida es negativa

$$\text{Area del recinto } = -\int_a^b f(x)\,dx$$



1. *Si c es un punto interior de* $[a, b]$ *entonces:* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

2. *Si a=b entonces* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. *Si permutamos los límites de integración, la integral cambia de signo.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

4. *Integral de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de las funciones*

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

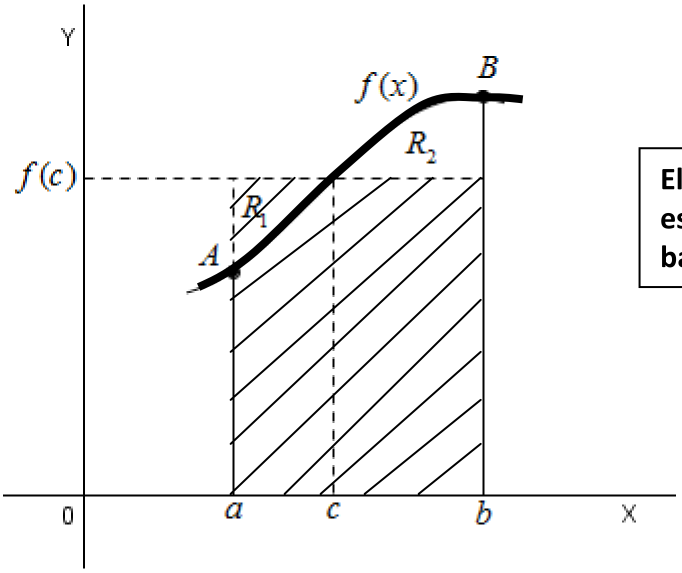
5. *Integral del producto de un número real por una función es igual al producto del número real por la integral de la función.*

$$\int_a^b K\, f(x)dx = K\int_a^b f(x)\,dx$$

— *Teorema del valor medio para integrales*

Si f es continua en [a, b], existe un punto c en el interior de este intervalo tal que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)}$$

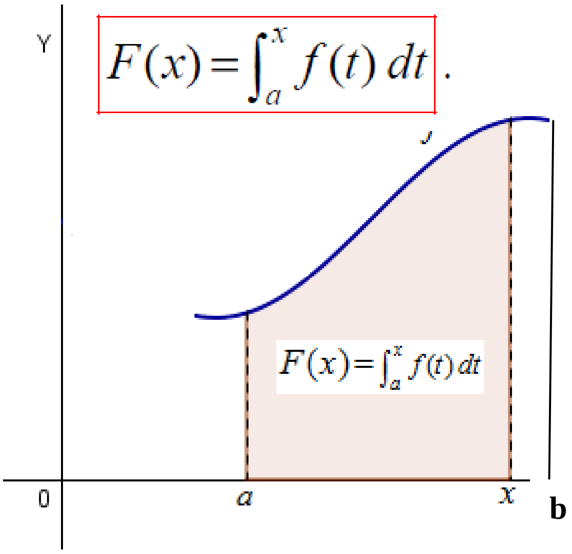


El área del trapecio mixtilineo abBA es igual al área de un rectángulo de base (b - a) y altura f (c)

— *Función Integral*

Dada un función continua en, [a,b] existe para todo x del mismo la integral definida:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



Para una función que toma valores positivos, la integral F(x) representa el área del recinto R limitada por la función f, el eje horizontal y las rectas t=a y t=x. (Para cada x del intervalo.)

$$Si\ x=a \Rightarrow F(a)=0=\int_a^a f(t)\,dt$$

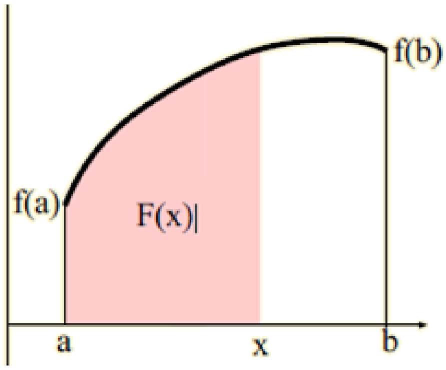
$$Si\ x=b \Rightarrow F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

Si bien las áreas que determinan las funciones se pueden calcular con el método comentado anteriormente, afortunadamente aquí no realizaremos límites de sumas de áreas de rectángulos. Ello **se debe a un resultado conocido como teorema fundamental del cálculo integral.**

— *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*

Si f es una función continua en [a,b] , y consideramos la función integral

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$



Se tiene que **F(x)** derivable en [a,b] y su derivada es:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}$$

Esto es, el teorema nos dice que la función integral

F(x) que da las áreas entre a y x (para cada valor de x)

es una primitiva de f(x)

Teorema del valor medio integral

Demostración:

Sea $x_0 \in [a,b]$ cualquiera, calculemos $F'(x_0)$

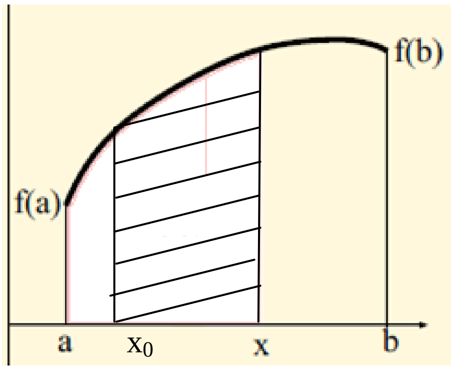
$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(c)(x - x_0)}{(x - x_0)}$$

$$\boldsymbol{c \in [a,b]}$$

$$\boldsymbol{f(c) \quad es\ un\ valor\ intermedio\ de\ la\ funci\acute{o}n}$$

$= \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$

Cuando $x \to x_0$ *entonces* $c \to x_0$



Por tanto queda demostrado que $F'(x_0) = f(x_0)$
Para cualquier $x_0 \in [a,b]$, luego es:

$F'(x) = f(x) \quad x \in [a,b]$ y de éste modo **es F(x) UNA PRIMITIVA de la función f(x).**

— *¡Problema del área resuelto!*

Si por los **métodos de integración** del tema anterior podemos **obtener** una primitiva **G(x)** de la función f(x), entonces, como la función **Área F(x)** es también una primitiva de la función **f(x), ambas primitivas G(x) y F(x) se diferenciarán en una constante**, esto es: **F(x) = G(x) + C donde C es una constante**

Calculemos esta constante:

Por una parte, es **F(a) = G(a) + C pero también** $\boldsymbol{F(a)} = \int_a^a f = 0$ por lo tanto:

0 = G(a) + C luego C = - G(a)

Queda así **F(x) = G(x) - G(a) por tanto F(b) = G(b) - G(a) pero como** $\boldsymbol{F(b)} = \int_a^b f$

Queda

$$\int_a^b f = \mathbf{G(b) - G(a)} \quad \textbf{¡problema resuelto!}$$

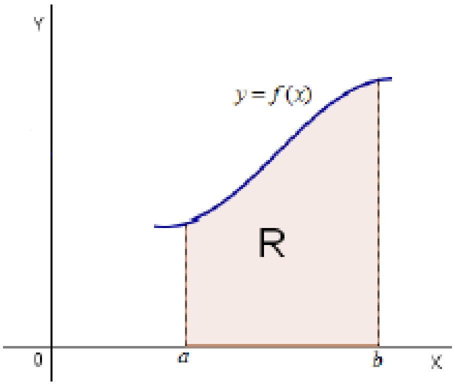
Observaciones:

- La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación las integrales con las derivadas.
- Para hallar la integral definida seguiremos el siguiente proceso:
  - Se halla una primitiva G(x) cualquiera de la función f(x).
  - Se sustituyen en esta primitiva G(x) los límites de integración -el superior y el inferior y se restan los resultados.

Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas

La integral definida es un método rápido para calcular áreas, volúmenes, longitudes, etc. En física su empleo es constante al estudiar el movimiento, el trabajo, la electricidad, etc.

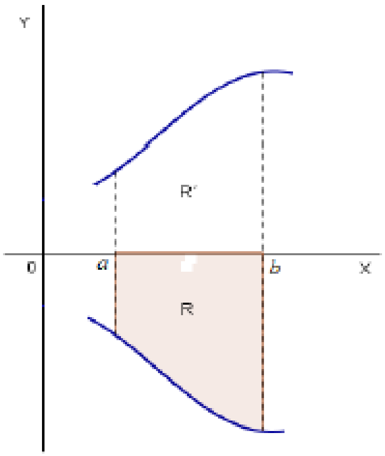
1. *Área del recinto donde interviene una función positiva* $(f(x) \geq 0)$



f(x) continua y positiva en $[a,b]$ *(encima del eje de abscisas)*
El área limitada por la curva $y=f(x)$, *el eje de abscisas OX* $y=0$, *y las rectas* $x=a, x=b$, *viene dada por:*

$$\boxed{A(R)=\int_a^b f(x)dx}$$

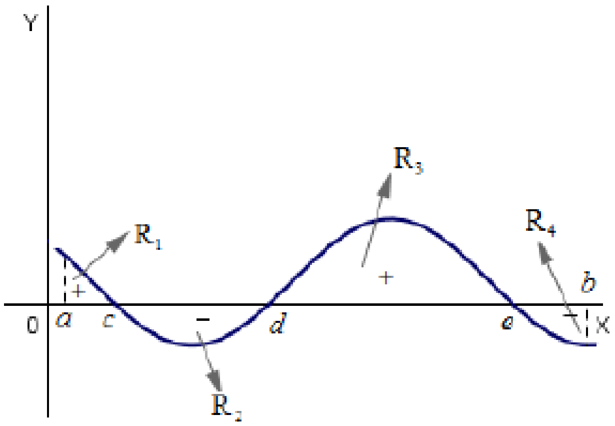
2. *Área del recinto donde interviene una función negativa* $(f(x) \leq 0)$



f(x) continua y negativa en $[a,b]$ *(debajo del eje de abscisas).*
El área limitada por la curva $y=f(x)$ *el eje de abscisas OX* $y=0$, *y las rectas* $x=a, x=b$, *viene dada por:*

$$\boxed{A(R)=-\int_a^b f(x)dx}$$

3. *Área del recinto donde f(x) es positiva y negativa en subintervalos.*

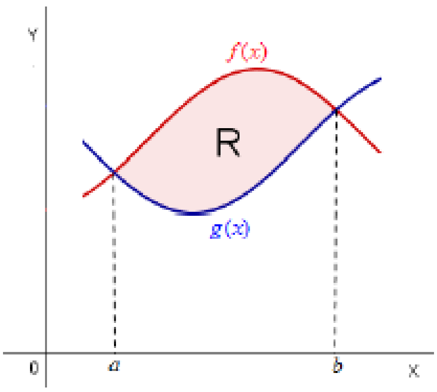


En este caso el área del recinto total no viene dada por la integral definida entre a y b , sino que es necesario calcular las áreas de cada una de las regiones R_i, y luego sumarlas.

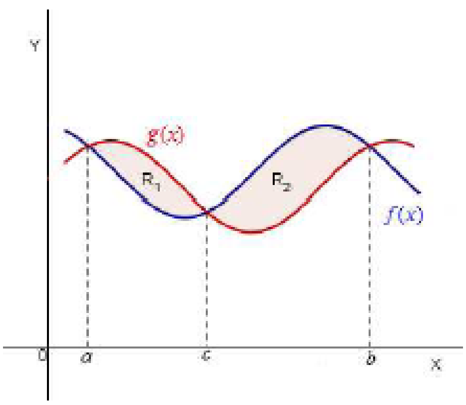
$$\boxed{A(R)=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx-\int_e^b f(x)dx}$$

4. *Área del recinto donde intervienen dos funciones.*

Si las gráficas de dos funciones se cortan en dos o más puntos, pueden determinar también un recinto cuya área es posible calcular.
En este caso se calculan previamente los puntos de intersección de ambas curvas. Se dibuja siempre que sea posible el recinto y se ve como puede obtenerse a partir de la suma o diferencia de los recintos que abarcan por separado las gráficas.



$$\boxed{R=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx}$$

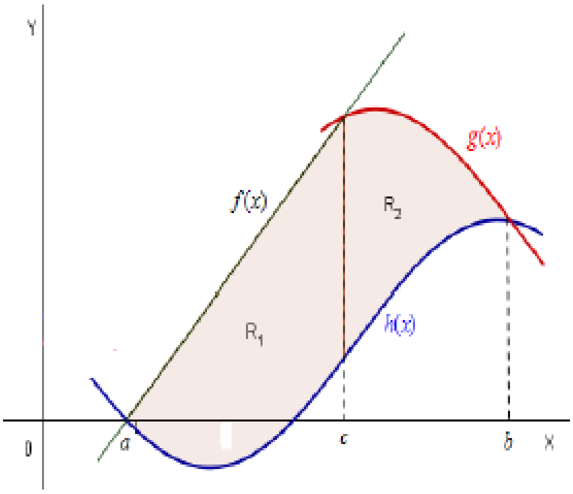


$$R=R_1+R_2$$

$$\left.\begin{array}{l} R_1=\int_a^c\left[g(x)-f(x)\right]dx \\ R_2=\int_c^b\left[f(x)-g(x)\right]dx \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\int_a^c\left[g(x)-f(x)\right]dx+\int_c^b\left[f(x)-g(x)\right]dx}$$

Si hay más de dos funciones continuas, se dibujan y se buscan los intervalos en los que es necesario dividir la integral para aplicar los resultados anteriores.



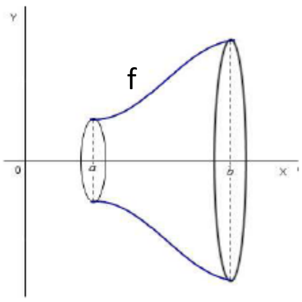
$$R = R_1 + R_2$$

$$\boxed{R = \int_a^c \left[f(x) - h(x) \right] dx + \int_c^b \left[g(x) - h(x) \right] dx}$$

Aplicación de la integral definidla cálculo de volúmenes. Volumen de un sólido de revolución.

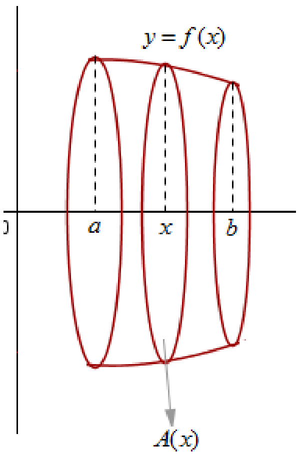
El volumen de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje de abscisas, el recinto limitado por la gráfica de f(x) y el eje OX entre a y b es:

$$\textbf{Volumen} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$



Cálculo del volumen por secciones. Principio de Cavalieri.

Sea A(x) el área de las secciones producidas en un sólido por planos perpendiculares al eje OX en todos los puntos de[a,b]. Si A(x) es una función continua, el volumen del sólido es:



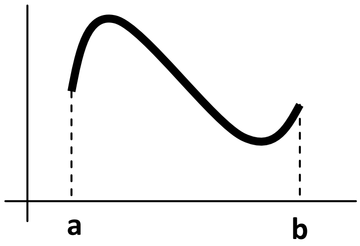
$$\boxed{V = \int_a^b A(x) dx}$$

"Dos sólidos cuyas áreas de las secciones perpendiculares a un determinado eje sean Iguales tienen el mismo volumen"

— *Cálculo de la longitud de una curva*

La longitud de una curva que coincide con la gráfica de una función derivable f en [*a*, *b*] *es:*

$$\boxed{\textbf{Longitud} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$



— *Aplicaciones Físicas de la Integral*

Espacio: $\boxed{s(t) = \int_0^t v(t)\,dt}$

Velocidad: $\boxed{v(t) = \int_0^t a(t)\,dt}$

Trabajo realizado por una fuerza: $\boxed{T(A) = \int_0^A F(x)\,dx}$

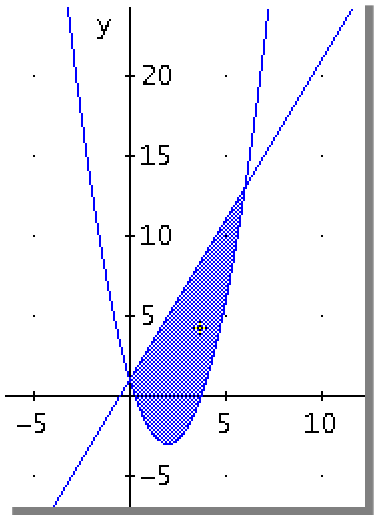
Otras aplicaciones:

- Examinar el comportamiento aleatorio de variables continuas (función de densidad probabilidad).
- Conocer el valor promedio de una función.
- Hallar momentos (fuerzas que ejercen ciertas masa con respecto a un punto) y centros de masa o centroide (el punto en que un objeto se equilibra horizontalmente).
- Encontrar la presión ejercida por un fluido.
- Calcular el trabajo realizado de mover un objeto de un punto a otro.
- Obtener velocidades y aceleraciones de móviles.
- Conocer el superávit del consumidor (cantidad de dinero ahorrado por los consumidores, al comprar un artículo a un precio dado).
- Determinar el flujo sanguíneo (volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo) de una persona y su gasto cardiaco (volumen de sangre bombeado por el corazón por unidad de tiempo.

Ejercicios:

1. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 4x + 1 \quad y = 2x + 1$

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas, para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 2x + 1 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 1 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x = 0$$

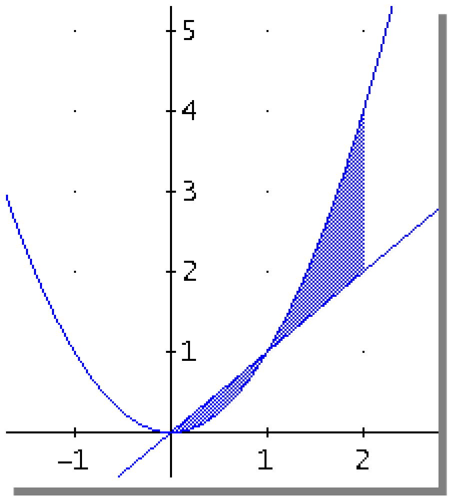
$$x \cdot (x - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 \left[2x + 1 - \left(x^2 - 4x + 1\right)\right] dx = \int_0^6 \left[6x - x^2\right] dx =$$

$$= 6 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^6 = 3x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^6 = 3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}\Bigg] = 36\, u^2$$

2. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = x \quad x = 0 \quad x = 2$

Calculamos los puntos de corte de la curva con la recta y= x para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow$$

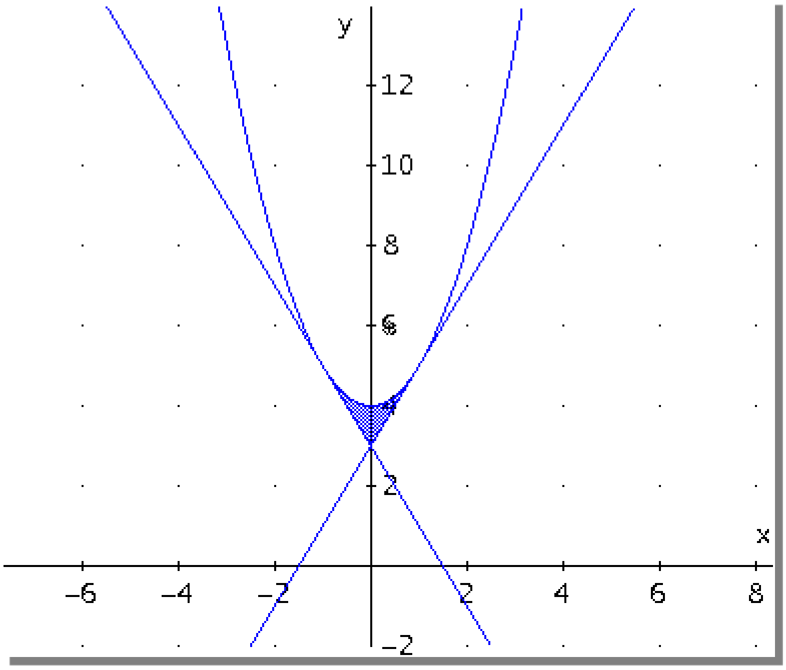
$$x \cdot (x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 1$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\, u^2$$

$$S_1 = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{6}\, u^2$$

$$S_2 = \int_1^2 \left[x^2 - x\right] dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg]_1^2 = \left[\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right] = \frac{5}{6}\, u^2$$

3. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 4$ y las rectas tangentes en los puntos de abcisa $x = -1 \quad x = 1$



Calculamos las ecuaciones de las rectas tangentes:
En nuestro caso serán:

$$f'(x) = 2x$$

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 2\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3$$

$$y - f(-1) = f'(1)\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -2\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3$$

$$S = \int_0^1 \left[\left(x^2+4\right) - \left(2x+3\right)\right] dx = 2\cdot\int_0^1 \left[x^2 - 2x + 1\right] dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) = \frac{2}{3}u^2$$

4. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 \quad y = 2x \quad y = x$

Calculamos los puntos de corte de las curva $y = x^2 \quad y = 2x$ para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 2$$

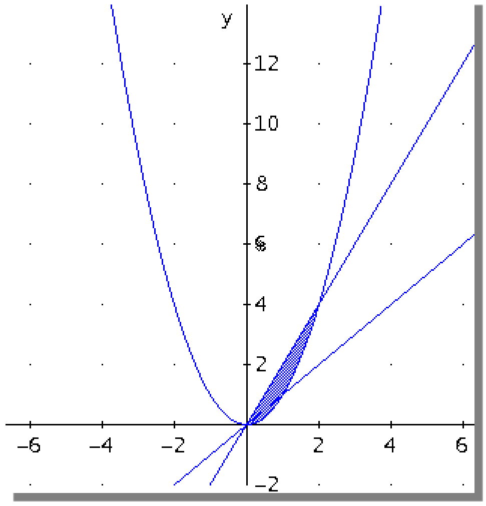
$$S_1 = \int_0^2 \left[2x - x^2\right] dx = \left.x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left.2^2 - \frac{2^3}{3}\right] = \frac{4}{3}u^2$$

Calculamos los puntos de corte de las curva $y = x^2 \quad y = x$ para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 1$$

$$S_2 = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\Bigg] = \frac{1}{6}\,u^2$$

Entonces $S = S_1 - S_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}\,u^2$



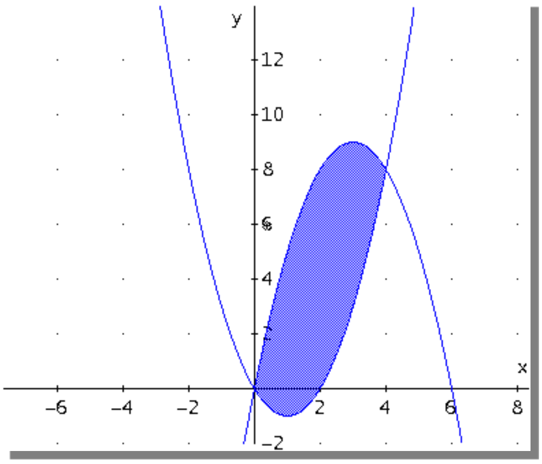
5. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 6x - x^2 \quad y = x^2 - 2x$

Calculamos los puntos de corte de las curva $y = 6x - x^2 \quad y = x^2 - 2x$ para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 6x - x^2 = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad 6x - x^2 - x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 8x = 0 \quad \Rightarrow$$

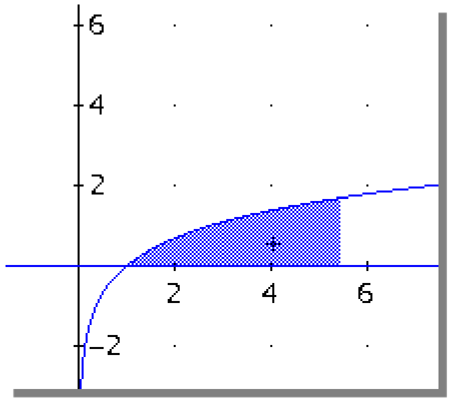
$$-x^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(-x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 4$$

$$S = \int_0^4 \left[6x - x^2 - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 \left[-2x^2 + 8x\right] dx = \left. -2\cdot\frac{x^3}{3} - 8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -2\cdot\frac{4^3}{3} - 8\cdot\frac{4^2}{2}\Bigg] = \frac{64}{3}\,u^2$$



6. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = \ln x \quad y = 0 \quad x = 2e$

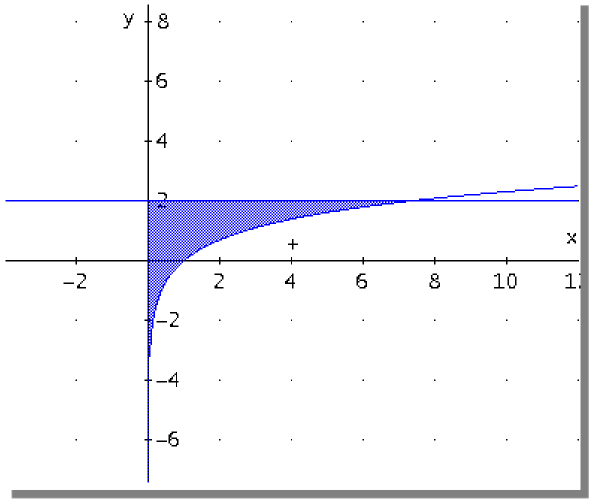
$$S = \int_1^{2e} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big]_1^{2e} =$$
$$= (2e \ln 2e - 2e) - (\ln 1 - 1) = 2e \ln 2 + 1 \, u^2$$



$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$
$$= x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = x \cdot \ln x - x$$
$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

7. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = \ln x \quad y = 2$ y los ejes coordenados.

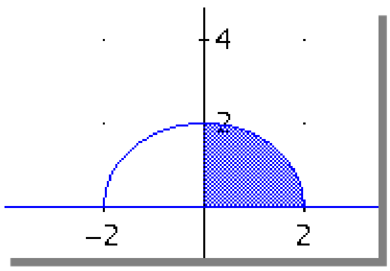
Calculamos los puntos de corte de las curva $y = \ln x \quad y = 2$ para lo cuál resolvemos el sistema de ecuaciones:



$$\left.\begin{array}{l} y = \ln x \\ y = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ln x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = e^2$$
$$S_1 = \int_1^{e^2} [2 - \ln x] \, dx = 2x - x \ln x + x \Big]_1^{e^2} =$$
$$= 3x - x \ln x \Big]_1^{e^2} = (3 \cdot e^2 - e^2 \ln e^2) - (3 - \ln 1) =$$
$$= (3 \cdot e^2 - 2e^2) - 3 = e^2 - 3$$
$$S = S_1 + S_2 = 2 + (e^2 - 3) = e^2 - 1 \, u^2$$

8. Hallar el área de un círculo de radio 2.

La ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio r es: $x^2 + y^2 = r^2$
En nuestro caso:
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{4 - x^2}$$
El área del sector circular correspondiente al primer cuadrante es:



$$S_1 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\cdot sen\ t)^2}\ \cdot 2\cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cdot sen^2\ t}\ \cdot 2\cdot \cos t\cdot dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cdot(1-sen^2\ t)}\cdot 2\cdot \cos t\cdot dt = 4\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\ t\cdot dt = 4\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\cdot dt = 2\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t\cdot dt =$$

$$= 2\cdot \left[t+\frac{1}{2}\cdot sen\ 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot sen\ 2\cdot\frac{\pi}{2}-\left(0+\frac{1}{2}\cdot sen\ 2\cdot 0\right)\right] = 2\cdot\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot sen\ \pi\right] = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$x = 2\cdot sen\ t \quad \Rightarrow \quad dx = 2\cdot \cos t\cdot dt$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2\cdot sen\ t \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2\cdot sen\ t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$S = 4\cdot S_1 = 4\cdot \pi\ u^2$$